

בחינה בהסתברות להנדסה ביו-רפואית

קורס 0555-1140
המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר לכל תלמיד להשתמש בשלושה דפי A4 הכתובים משני צדדיהם. אין להעביר דפים אלה בין תלמידים. תלמידים הזכאים לשימוש בחומר עזר נוסף, רשאים להשתמש בדף נוסף. מותר להשתמש במחשב כיס.
ענו על כל ארבעת השאלות הראשונות.
על שאלה 5 רשאים לענות רק חברי קבוצה C של אנשי המילואים.
משקל כל שאלה רשום בתחילתה. בכל שאלה יש חלוקה שווה של הנקודות בין הסעיפים.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N + 3, 100\}$.
נמקו את תשובותיכם!

בהצלחה!

שאלה 1 (40 נקודות)

גארת בייל מבצע סדרה של הטלות ב"ת של מטבע שבכל הטלה מראה תוצאת "עץ" בסיכוי רבע.
הארי קיין מבצע סדרה של הטלות ב"ת של מטבע שבכל הטלה מראה תוצאת "עץ" בסיכוי שלושה רבעים.
גלן הודל מסתכל על אחת מבין שתי הסדרות של ההטלות. בסיכוי חצי הוא מסתכל על סדרת ההטלות של גארת בייל ובסיכוי חצי הוא מסתכל על סדרת ההטלות של הארי קיין.
עבור כל $k \geq 1$ יהי X_k אינדיקטור שמקבל את הערך 1, אם ורק אם בהטלה ה- k שגלן הודל רואה מתקבלת תוצאת "עץ".

- א. למה שווה $E(\sum_{k=1}^8 X_k)$?
ב. מהו מקדם המתאם בין X_1 לבין X_2 ?
ג. מצאו בדרך אחת את $P(X_3 = 1 | X_1 + X_2 = 2)$.
ד. מצאו בדרך שניה את $P(X_3 = 1 | X_1 + X_2 = 2)$.

(בסעיפים ג' וד' הכוונה היא להסתברות מותנית).

שאלה 2 (20 נקודות)

יהי $X \sim \exp(1)$ (משתנה מקרי מעריכי).

- א. מהו $E((X - 1)^2)$?
ב. האם מתקיים $E(X^8) > 9$? נמקו את תשובתכם בהתבסס על עקרון התוחלת השלמה.

שאלה 3 (10 נקודות)

יהי $X \sim \text{Bin}(400, 0.5)$. חשבו בקירוב את $P(X \leq 220)$?

שאלה 4 (30 נקודות)

בידנו יש מטבע. השערה אחת היא שהמטבע הוא מוטת ונותן תוצאת "עץ" בהסתברות שלוש רבעים, ותוצאת "פלי" בסיכוי רבע. ההשערה האלטרנטיבית היא שהמטבע הוא הוגן, זאת אומרת שהוא נופל על "עץ" ו"פלי" בסיכויים שווים. אנו רשאים לצפות בתוצאות של n הטלות ב"ת של המטבע, ואז לבחור בהשערה. אנו יכולים לבחור במדיניות שתתן לנו כללים להחלטה עבור כל תוצאות אפשריות של ההטלות. אנו עשויים לבחור בהשערה הנכונה או לטעות.

- א. נניח ש $n = 1$. האם נוכל לבחור במדיניות כך שגם במקרה שהמטבע מוטת נטעה בבחירת ההשערה בסיכוי קטן מ 0.45, וגם אם המטבע הוגן נטעה בבחירת ההשערה בסיכוי קטן מ 0.45?
- ב. נניח ש $n = 1$. האם נוכל לבחור במדיניות כך שגם במקרה שהמטבע מוטת נטעה בבחירת ההשערה בסיכוי קטן מ 0.2, וגם אם המטבע הוגן נטעה בבחירת ההשערה בסיכוי קטן מ 0.2?
- ג. האם קיים n סופי כך שלאחר צפייה ב n הטלות נוכל לבחור בהשערה הנכונה בהסתברות אחת?
-

שאלה 5

על שאלה זו רשאים לענות רק חברי קבוצה C של אנשי המילואים. הציון שינתן לשאלה זו ישמש כציון מגן של עשרים אחוזים לציון הבחינה.

שאלה זו היא גרסא של בעיית המזכירה הרשלנית. לגלן הודל מיועדים חמישה מכתבים. לכל אחד מעשרה אנשים אחרים מיועד מכתב אחד. המזכירה התבלבלה ושלחה את חמישה עשר המכתבים באקראי. היא שלחה חמישה מכתבים אקראיים לגלן הודל ומכתב אחד אקראי לכל אחד מהאנשים האחרים.

- א. מהי ההסתברות שגלן הודל יקבל את כל חמשת המכתבים שמיועדים לו?
- ב. מהי תוחלת מספר המכתבים שהגיעו ליעדם בהינתן שגלן הודל קיבל את כל חמשת המכתבים שהיו מיועדים לו?
-